

Gödelsche Unvollständigkeitssätze

Wechseln zu: [Navigation](#), [Suche](#)

Dieser Artikel erfüllt die [GlossarWiki-Qualitätsanforderungen](#) nur teilweise:

Korrektheit: 4 (größtenteils überprüft)	Umfang: 1 (zu gering)	Quellenangaben : 2 (wichtige Quellen fehlen)	Quellenarten: 5 (ausgezeichnet)	Konformität: 5 (ausgezeichnet)
---	---------------------------------	---	---	--

[Kurt Gödel](#) hat mit seinem berühmten [erstem Unvollständigkeitssatz](#) bewiesen, dass es in jedem widerspruchsfreiem axiomatischem System, das die Arithmetik der natürlichen Zahlen umfasst, wahre Aussagen gibt, die nicht mit Hilfe des Systems bewiesen werden können.^[1]

Gödel hat damit bewiesen, dass es kein Axiomensystem gibt, mit dem sich alle arithmetischen Wahrheiten beweisen lassen. Damit ist der Traum von [David Hilbert](#), mit der *Principia Mathematica* die Arithmetik vollständig und widerspruchsfrei zu axiomatisieren, geplatzt.

Inhaltsverzeichnis

- 1 [Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz](#)
 - [1.1 Verallgemeinerung von Barkley Rosser](#)
- 2 [Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz](#)
- 3 [Beweisidee](#)
- 4 [Quellen der Sätze „GöU“ und „WAHR?“](#)
- 5 [Beweis der Gödelschen Unvollständigkeitssätze](#)
- 6 [Quellen](#)

1 Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz

TO BE DONE

1.1 Verallgemeinerung von Barkley Rosser

TO BE DONE

2 Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz

TO BE DONE

3 Beweisidee

Die Beweisidee, die dem ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz zugrunde liegt, kann man sich sehr schön an folgendem Beispiel klar machen:

Der Leser kann diesen Satz (namens „GöU“) nicht beweisen.

Bei „GöU“ handelt es sich um einen wahren Satz.

Beweis (durch den Wiki-Autor dieses Artikels)

Wenn der Leser „GöU“ beweisen könnte, würde er beweisen, dass er „GöU“ nicht beweisen kann. Da dies einen Widerspruch darstellt, kann der Leser „GöU“ nicht beweisen. Der Satz ist also wahr!

Damit gibt es also einen wahren Satz, den das axiomatische System „Leser“ nicht beweisen kann.

Auf dieselbe Weise kann der Autor dieses Artikels sogar den Satz

Der Leser kann diesen Satz (namens „WAHR?“) nicht für wahr halten.

als wahr beweisen. (Man beachte, dass es sich beim vorangegangenen Satz um einen Satz auf Metametaebene handelt, da im darin enthaltenen Satz „WAHR?“ bereits Objekt- und Metaebene vermischt werden.)

Die Tatsache, dass der Satz „WAHR?“ beweisbar korrekt ist, ist für den Autor dieses Artikels besonders dramatisch: Als Wiki-Autor kann er die Wahrheit des Satzes „WAHR?“ beweisen, aber als Leser muss er, nachdem er den Beweis fertiggestellt hat und den Satz noch einmal auf Fehler hin durchliest, erkennen, dass der Satz (für ihn als Leser!) falsch sein **muss**.

4 Quellen der Sätze „GöU“ und „WAHR?“

Die ursprüngliche Version des Satzes „GöU“ lautet folgendermaßen

Lucas cannot consistently assert this sentence.^[2]

oder - in deutscher Übersetzung -

Lucas kann diesen Satz nicht widerspruchsfrei behaupten.^[3]

und war als Antwort von C. H. Whietely an J. R. Lucas gedacht. Lucas hat aus Gödels Unvollständigkeitssatz geschlussfolgert, dass „der Geist nicht als Maschine zu erklären ist“^[4], dass also der menschliche Geist prinzipiell mehr vollbringen kann als Maschinen, da er den Gödelschen Beschränkungen nicht unterliegen würde. Wie allerdings Hofstadter, Whitely und andere nachvollziehbar darlegen, gibt es auch für den menschlichen Geist unüberwindbare Beschränkungen, so dass die Argumentation von Lucas nicht stichhaltig ist.

Die ursprüngliche Version des Satzes „WAHR?“ lautet:

Lucas cannot consistently believe this sentence.^[2]

5 Beweis der Gödelschen Unvollständigkeitssätze

Ein sehr anschauliche Version des Beweises von Gödel einschließlich vieler Implikationen, die dieser Satz zur Folge hat, findet man in dem Buch „Gödel, Escher, Bach“ von Douglas R. Hofstadter^[5].

6 Quellen

Gödel (1931): Kurt Gödel; Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I; in: [Monatshefte für Mathematik und Physik](#); Band: 38; Nummer: 1; Seite(n): 173-198; Verlag: [Springer-Verlag GmbH](#); Adresse: [Wien](#); [Web-Link](#); 1931; [Quellengüte](#): 5 (Artikel)

[Hofstadter, Dennett \(1985\)](#), Chapter 17, Reflections

[Hofstadter \(1987\)](#), Seite 510

[Hofstadter \(1987\)](#), Seite 504

Hofstadter (1987): [Douglas R. Hofstadter](#); Gödel, Escher, Bach – ein Endloses Geflochtenes Band; Auflage: 10; Verlag: [Klett-Cotta](#); ISBN: 3-6089-3037-X; 1987; [Quellengüte](#): 5 (Buch)

Kategorie:

[Logik](#)

Diese Seite wurde zuletzt am 31. Januar 2016 um 18:14 Uhr bearbeitet.

Inhalt verfügbar unter [CC BY-SA 4.0](#).

