

Komprehension

Wechseln zu:[Navigation](#), [Suche](#)

Dieser Artikel erfüllt die [GlossarWiki-Qualitätsanforderungen](#) **nur teilweise**:

Korrektheit: 2 (teilweise überprüft)	Umfang: 2 (wichtige Fakten fehlen)	Quellenangaben: 2 (wichtige Quellen fehlen)	Quellenarten: 5 (ausgezeichnet)	Konformität: 5 (ausgezeichnet)
--	--	---	---	--

Das Zusammenfassen von Objekten zu einer Einheit wird **Komprehension** genannt. Komprehension ist ein fundamentales Prinzip der Mathematik sowie der Informatik.

In der **Mengenlehre** werden **Objekte** mit Hilfe der **Elementbeziehung** zu **Mengen** und **Klassen** zusammengefasst. Es ist möglich, mathematische Theorien **ausschließlich** mit Hilfe von Klassen und der Elementbeziehung zu formalisieren (z. B. mittels der klassenlogischen Sprache LE von Glubrecht, Oberschelp und Todt^[1]). Purkert und Ilgauts betonen, dass viele Mathematiker sogar der Meinung seien, dass die Mengenlehre das Fundament für die gesamte Mathematik bildet: *Die Tatsache, daß alle mathematischen Begriffe auf mengentheoretische Begriffe zurückgeführt werden können, hat einige Autoren sogar zu der Behauptung veranlaßt, die gesamte Mathematik sei letztendlich mit der Mengenlehre identisch.*^[2]

Aber auch in der **Programmierung** ist das Zusammenfassen von Objekten zu komplexeren Objekten von zentraler Bedeutung: Jede höhere Programmiersprache stellt komplexe **Datenstrukturen** – wie Tupeln, Listen, Bäumen etc. – bereit, um Daten verwalten zu können.^[3]

Um Komprehension formalisieren zu können, benötigt man drei Begriffe:

Container/Collection: Das sind Objekte, die Objekte als Elemente enthalten können.

Individuen: Das sind Objekte, die in Objekten als Elemente enthalten sein können.

Elementbeziehung: Diese setzt Individuen und Container in Beziehung zueinander.

Der Begriff **Container** wurde – in Ermangelung eines gebräuchlicheren Terminus – der **C++-Standardbibliothek STL** entlehnt. In SQL wird auch der Begriff **Collection** dafür verwendet.^[4] Der Begriff **Individuum** ist etwas allgemeiner als der von Cantor geprägte Begriff **Element**^[5]. Er geht auf Quine zurück und wird von Glubrecht, Oberschelp, Todt bei der Definition diverser Klassenlogiken verwendet.^{[6][1]}

In der Mathematik heißt ein Container heute üblicherweise **Menge** oder **Klasse**, aber es finden sich – insbesondere in alten Schriften – diverse weitere Bezeichnungen: **Mannigfaltigkeit**, **Ingebriff**, **Gesamtheit**, **Umfang** oder **System**. Für die Gesamtheit aller Individuen finden sich in der Literatur weitere Begriffe, wie z. B. **Individuenbereich**, **Dingbereich** oder **Tägermenge**.

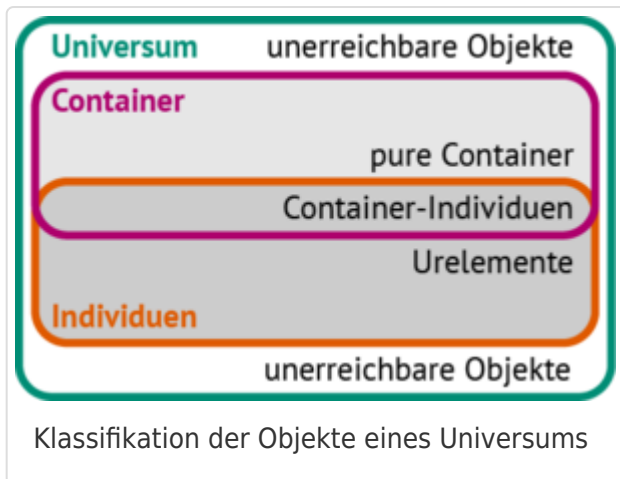
Inhaltsverzeichnis

- 1 Definition (Duden – Das Fremdwörterbuch (2001))^[7]
- 2 Definitionen (Kowarschick (GlossarWiki))
- 3 Unterschied zwischen mathematischen und informationstechnischen Theorien
- 4 Mengenlehre
- 5 Quellen
- 6 Siehe auch

1 Definition (Duden – Das Fremdwörterbuch (2001))^[7]

(Philos.) Zusammenfassung, Vereinigung von Mannigfaltigkeiten zu einer Einheit

2 Definitionen (Kowarschick (GlossarWiki))



Es sei U ein **Universum** (*Universe of Discourse*) einer mathematischen Theorie oder eines informationstechnischen Systems. Die Mitglieder von U heißen **Objekte**.

Unter Komprehension versteht man die Zusammenfassung von beliebig vielen Objekten aus U zu *einem* Objekt aus U mit Hilfe einer so genannten **Elementbeziehung**. Ein Objekt, das Objekte als Elemente enthält, wird **Container** genannt.

Die Objekte des Universums U können hinsichtlich einer gegebenen Elementbeziehung ϵ folgendermaßen klassifiziert werden:

Ein **ϵ -Container** ist ein Objekt, das Elemente (gemäß der gegebenen Beziehung ϵ) enthalten kann.

Ein **leerer ϵ -Container** ist ein Objekt, das zwar als ϵ -Container klassifiziert wird, aber zu keinem Zeitpunkt ein Element enthalten kann.

Ein **ϵ -Individuum** ist ein Objekt, das Element eines ϵ -Containers sein kann.

Ein Objekt, das sowohl ϵ -Individuum als auch ϵ -Container ist, heißt **ϵ -Container-Individuum**.

Ein ϵ -Container, der kein ϵ -Individuum ist, heißt **reiner ϵ -Container**.

Ein ϵ -Individuum, das kein ϵ -Container ist, heißt **ϵ -Urelement**.

Ein Objekt, das weder ein ϵ -Individuum noch ein ϵ -Container ist, heißt **ϵ -unerreichbar**.

Wenn klar ist, welche Elementbeziehung gemeint ist, wird i. Allg. der Zusatz „ ϵ -“ bei den obigen Begriffen nicht geschrieben. Allerdings muss man diesen Zusatz manchmal explizit angeben, da es in einer mathematischen Theorie oder einem informationstechnischen System durchaus mehrere Elementbeziehungen geben kann und jedes Objekte des Universums in jeder Elementebeziehung eine andere Rolle spielen kann.

3 Unterschied zwischen mathematischen und informationstechnischen Theorien

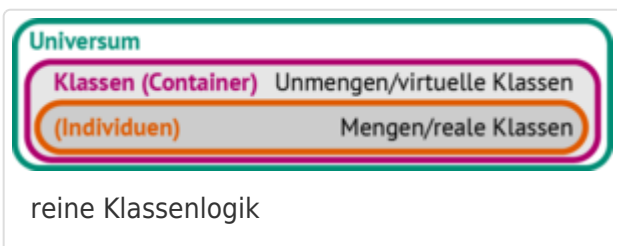
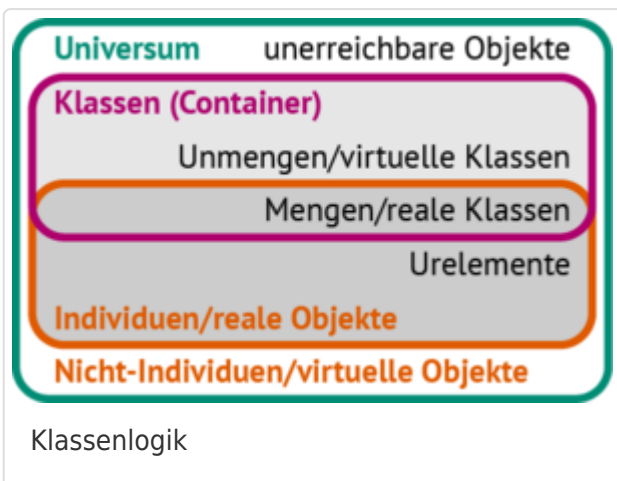
Mathematischen Theorien liegt meist ein Bündel von statischen Welten zu Grunde, die irgendwelche gemeinsame Eigenschaften haben. Diese Welten werden durch sogenannte **Modelle** beschrieben, die gemeinsamen Eigenschaften durch sogenannte **Axiome**, deren Gültigkeit in allen betrachteten Welten als gegeben angesehen wird.^[8] Zeitliche Aspekte werden in mathematischen Theorien eher selten betrachtet. (Es gibt allerdings Ausnahmen, wie z. B. die **Temporallogik** oder die **Turingmaschine**.)

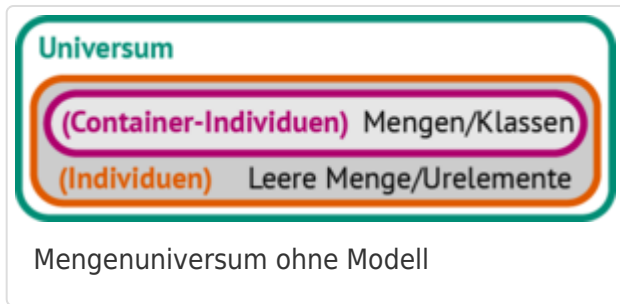
Informationstechnische Systeme leben dagegen vom Zeitbegriff. Ein **Programm** befindet sich zum Startzeitpunkt in einem bestimmten Zustand und führt nacheinander bestimmte **Anweisungen** aus, die das Programm jeweils in einen neuen Zustand überführen. (Die Turingmaschine beschreibt dieses Verhalten mit mathematischen Mitteln.)

Für mathematische Theorien reicht es daher üblicherweise, eine Elementbeziehung durch **Relationen** auf den Universen der betrachteten Welten zu interpretieren. Um den gegebenen Axiomen zu genügen, müssen die Elementrelationen auf den zugehörigen Universen jeweils bestimmte Bedingungen erfüllen. Für informationstechnische Systeme muss es dagegen möglich sein, im Laufe der Zeit Container zu erzeugen, zu durchsuchen, zu modifizieren und zu löschen, da hier die Welten nicht gleichzeitig, sondern nacheinander betrachtet werden. Man benötigt für die Handhabung von Containern also zusätzlich sogenannte **CRUD**-Befehle (create, read, update, delete).

4 Mengenlehre

TO BE DONE





Die wichtigsten Container in mathematischen Theorien sind: [Mengen](#), [Klassen](#), [geordnete Paare](#), [Tupel](#).

Urelemente: Man geht von einem Bereich von Objekten mit einer Element-Beziehung ϵ aus. Es wird ein (eventuell leerer) Teilbereich aller Objekte ausgezeichnet. Die ihm angehörenden Objekte heißen Urelemente. Für alle Urelemente a gilt, es gibt kein d mit $d \epsilon a$ ^[9]

Üblicherweise ist ein leerer Container ein Container-Individuum. Es sind aber auch Situationen denkbar, in denen es sich um einen puren Container handelt.

In mathematischen Theorien gibt es meist genau einen leeren Container (die leere Menge), in informationstechnischen Systemen gibt es dagegen meist beliebig viele leere Container (Javascript: Mit `{}` - oder genauer `Object.create(null)` - wird jedesmal ein neues leeres Object erstellt).

Geordnete Paare sind per Definitionem Container, da sie genau zwei Objekte als Elemente enthalten, die so genannten Paarelemente. Auch die Verallgemeinerung der geordneten Paare, die [Tupel](#) sind Container. Ein n -Tupel enthält genau n Elemente - die so genannten Tupelemente - in einer bestimmten Reihenfolge.

In der Mengenlehre gibt es diverse weitere Arten von Objekten, die entweder als Container und/oder als Elemente auftreten können:

Klassen sind Container: Sie können Elemente enthalten (und zwar Urelemente und Mengen).

Urelemente können in Klassen als Elemente enthalten sein, können selbst aber keine Elemente enthalten.

Mengen sind spezielle Klassen (können also Elemente enthalten); sie können auch in Klassen als Elemente enthalten sein.

Unmengen sind spezielle Klassen (können also Elemente enthalten); sie sind aber so umfangreich, dass sie nicht in irgendwelchen Klassen als Elemente enthalten sein können.

Typische Urelemente sind Zahlen, Zeichenketten, Boolesche Werte etc. Üblicherweise verzichtet man in der Mathematik heutzutage auf die Definition von speziellen Urelementen. Es reicht aus, wenn man die leere Menge, d. h. die einzige Klasse, die keine Elemente enthält, als Urelement zur Verfügung hat. Alle andere Urelemente können dann durch spezielle Klassen (d. h. Container) repräsentiert werden (die Zahl „Null“ beispielsweise durch die leere Menge $\{\}$, die Zahl „Eins“ durch die einelementige Menge $\{\{\}\}$ etc.). Es gibt aber auch Ausnahmen, wie z. B. die Sprache **LISP**, in der - vor allem aus Performanz-Gründen - nicht auf Urelemente verzichtet wird. In LISP werden die Urelemente „Atome“ genannt. ^[10]

Auch bei Paaren und deren Verallgemeinerung, den [Tupeln](#) handelt es sich um Container, die Elemente enthalten, die so genannten Paar- oder Tupelemente. Zwischen Klassen und Klassenpaaren gibt es also einen wichtigen Unterschied: Unmengen können keine Elemente von irgendwelchen Klassen sein, wohl aber (Paar-)Elemente von Klassenpaaren. Das heißt, mit Hilfe Klassenpaaren (und Klassentupeln) kann man auch Unmengen zu größeren Einheiten zusammenfassen. Mit Mengenpaaren geht dies nicht.

Allerdings gibt es nicht nur Mengen- und Klassenpaare. Ein geordnetes Paar kann – in speziellen formalen Systemen – an Stelle von Klassen und Urelementen auch andere Arten von Elementen enthalten. [Gottlob Frege](#) erlaubt beispielsweise „Gegenstände“, „Funktionen“ und „Werthverläufe“ als Elemente.^[11] [John von Neumann](#) erlaubt „Argumente“ (und damit insbesondere auch spezielle **Funktionen**, die sogenannten „Argument-Funktionen“)^[12] und in **LISP** sind nur Atome (Urelemente) und Paare als Elemente erlaubt.^[10]

5 Quellen

2. **Glubrecht, Oberschelp, Todt (1983)**: Jürgen-Michael Glubrecht, Arnold Oberschelp und Günter Todt; Klassenlogik; Verlag: [Bibliographisches Institut](#); Adresse: **Mannheim, Wien, Zürich**; ISBN: 3-411-01634-5, 978-3411016341; 1983; **Quellengüte**: 5 (Buch)
4. **Purkert, Ilgands (1987)**: Walter Purkert und Hans-Joachim Ilgands; Georg Cantor 1845 – 1918; Reihe: *Vita Mathematica*; Verlag: [Birkhäuser](#); Adresse: **Basel, Boston, Stuttgart**; ISBN: 3-7643-1770-1; 1987; **Quellengüte**: 5 (Buch), S. 9
6. **Sebesta (2016)**: Robert W. Sebesta; Concepts of Programming Languages; Auflage: 11; Verlag: [Prentice Hall](#); ISBN: 978-1292100555, 978-0133943023; 2016; **Quellengüte**: 5 (Buch)
8. **ISO 9075-2 (2013)**: Committee Draft ISO/IEC CD 9075-; Organisation: [The United States of America \(ANSI\)](#); **Web-Link**; 2013; **Quellengüte**: 4 (Technischer Bericht)
10. **Cantor (1895)**: Georg Cantor; Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre; in: *Mathematische Annalen*; Band: 46; Nummer: 4; Seite(n): 481 – 512; Verlag: [B. G. Teubner Verlag](#); Adresse: **Leipzig**; ISSN: 00255831 (Papier), 14321807 (Online); **Web-Link 0, Web-Link 1, Web-Link 2, Web-Link 3**; 1895; **Quellengüte**: 5 (Artikel)
12. **Quine (1963)**: Willard Van Orman Quine; Set Theory and its Logic; Verlag: [Harvard University Press](#); Adresse: **Cambridge**; 1963; **Quellengüte**: 5 (Buch)
14. **Duden Band 5 (2001)**: Duden – Das Fremdwörterbuch; Band: 5; Auflage: 7; Verlag: [Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG](#); Adresse: **Mannheim**; ISBN: 3411040572; 2001; **Quellengüte**: 5 (Buch)
16. vgl. **Güntzer, Schmidt, Kempf, Möller (1989)**: Ulrich Güntzer, Gunther Schmidt, Michael Kempf und Bernhard Möller; Mathematische Logik; Band: TUM-I-8900; Hochschule: [Technische Universität München](#); 1989; **Quellengüte**: 4 (Skript)
18. **Felscher (1978)**: W. Felscher; Naive Mengen und abstrakte Zahlen; Band: 1; Verlag: [BI-Wissenschaftsverlag](#); Adresse: **Mannheim**; ISBN: 3-411-01538-1; 1978; **Quellengüte**: 5 (Buch)
20. **McCarthy (1960)**: John McCarthy; Recursive Functions of Symbolic Expressions and Their Computation by Machine, Part I; in: *Communications of the ACM*; Band: 3; Nummer: 4; Seite(n): 184-195; Verlag: [Association for Computing Machinery](#); Adresse: **New York**; **Web-Link 0, Web-Link 1**; 1960; **Quellengüte**: 5 (Artikel)
22. **Frege (1893)**: Gottlob Frege; Grundgesetze der Arithmetik; Band: I; Verlag: [Verlag Hermann Pohle](#); Adresse: **Jena**; **Web-Link 0, Web-Link 1, Web-Link 2, Web-Link 3**; 1893; **Quellengüte**: 5 (Buch)
24. **Neumann (1925)**: John von Neumann; Eine Axiomatisierung der Mengenlehre; in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*; Band: 154; Seite(n): 219-240; ISSN: 0075-4102, 1435-5345; **Web-Link 0, Web-Link 1**; 1925; **Quellengüte**: 5 (Artikel)

6 Siehe auch

[Wikipedia:Elementzeichen](#)

Kategorien:

[Logik](#)

[Mengenlehre](#)

[Informatik](#)

Diese Seite wurde zuletzt am 20. Mai 2019 um 14:04 Uhr bearbeitet.

Inhalt verfügbar unter [CC BY-NC-SA 4.0](#), falls Dokument nach dem 5. 3. 2011 erstellt wurde, sonst [CC BY-SA DE 3.0](#).

