Satz:Existenz und Eindeutigkeit der Projektionsoperatoren von geordneten Paaren

Wechseln zu:Navigation, Suche

Inhaltsverzeichnis

1 Satz: Existenz und Eindeutigkeit der Projektionsoperatoren von geordneten Paaren

Zwei Operatoren o_1 und o_2 heißen gleich, wenn Sie denselben Definitionsbereich D haben und allen Elementen aus D jeweils dasselbe Element zuordnen:

$\bigwedge x \in D: o_1(x) = o_2(x)$

Wenn das Paaraxiom

$\bigwedge a,b: [a,b] = [c,d] \leftrightarrow a=c \wedge b=d $

erfüllt ist und alle Paare p aus einem „Paaruniversum“ P (kurz $p \in P$) in der Form $[a,b]$ dargestellt werden können (dies ist eine triviale Forderung, wenn man P als Menge, Klasse oder „Universum“ von Elementen der Form $[a,b]$ definiert), gibt es – bezüglich der zuvor definierten Operatorengleichheit – genau einen Operator π_1 und genau einen Operator π_2 mit folgenden Eigenschaften:

π_1 und π_2 sind nur für Paare $p \in P$ definiert
$\pi_1([a,b]) = a$
$\pi_2([a,b]) = b$

Insbesondere gilt damit für jedes Paar $p \in P$ die Beziehung $p = [\pi_1(p),\pi_2(p)]$.

2 Beweis (mit Hilfe der Metametasprache „Deutsch“)

Das Problem mit diesem Satz ist, dass er den Funktions- oder Abbildungsbegriff benötigt, der häufig erst in einem zweiten Schritt eingeführt wird, nachdem der Begriff des geordneten Paares bereits definiert wurde. Daher kann diese Aussage zunächst nur anschaulich mit Hilfe der Metasprache „Deutsch“ bewiesen werden.

2.1 Existenz

Bei π_1 und π_2 handelt es sich um Abbildungen, die jedem Element vom Typ „Paar“ – und nur diesen – einen speziellen Wert zuweisen.

So eine Abbildung kann es nur geben, wenn sich diejenigen Paare, denen unterschiedliche Werte zugeweisen werden sollen, selbst unterscheiden. Wenn man beispielsweise $[a,b] := \{a,b\}$ festlegen würde, würden sich die „Paare“ $[2,5]$ und $[5,2]$ nicht unterscheiden, da die Mengen $\{2,5\}$ und $\{5,2\}$ einander gleich sind. In diesem Fall könnte es keine Abbildung π_1 geben, die dem „Paar“ $[2,5]$ den Wert 2 und dem „Paar“ $[5,2]$ den Wert 5 zuweist.

Wenn allerdings die Paardefinition das Paaraxiom von Hamilton erfüllt ist, unterscheiden sich alle Paare, die nicht aus denselben Elementen gebildet werden (z.B. unterscheiden sich in diesem Fall die beiden Paare $[2,5]$ und $[5,2]$). Das Paaraxiom fordert, dass aus $[a,b] = [c,d]$ stets $a=c$ *und* $b=d$ folgt. Im Umkehrschluss (logische Kontraposition) heißt dies, dass aus $a\not=c$ *oder* $b\not=d$ stets $[a,b] \not= [c,d]$ folgt. Das bedeutet aber, dass man beliebige Abbildungen definieren kann, die jedem Paar einen individuellen Wert zuweisen.

Insbesondere kann man also π_1 und π_2 definieren: Es sei $p \in P$ ein Paar. Laut Voraussetzung gibt es zwei Elemente a und b, so dass $p = [a,b]$. Die Elemente a und b sind eindeutig festgelegt. Gäbe es zwei weitere Elemente a' und b' mit $p = [a',b']$, so würde $[a',b'] = p = [a,b]$ gelten. Aus dem Paaraxiom folgte dann aber sofort $a' = a$ und $b' =b$. Wir definieren daher für jedes Paar p aus P die Abbildungswerte der beiden Paaroperatoren wie folgt: $\pi_1(p) := a$ und $\pi_2(p) := b$. Für jedes Nicht-Paar seinen π_1 und π_2 hingegen undefiniert.

2.2 Eindeutigkeit

Angenommen, es gäbe zwei unterschiedliche Projektionsoperatoren π_1 und π'_1, die beide für Paare das erste Paarelement extrahieren und für Nicht-Paare undefiniert sind.

Da für jedes Paar $p \in P$ gemäß Voraussetzung zwei Elemente a, b mit $p = [a,b]$ existieren, folgt aus den Eigenschaften $\pi_1([a,b]) = a$ und $\pi'_1([a,b]) = a$ sofort, dass die beiden Operatoren für **jedes** Paar dasselbe Ergebnis liefern.:

$\bigwedge a,b: \pi_1([a,b]) = a = \pi'_1([a,b])$.

Damit sind beide Operatoren (hinsichtlich des Abbildungsverhaltens von Paaren) identisch. Auch hinsichtlich des Abbildungsverhaltens von Nicht-Paaren verhalten sich beide Operatoren identisch, da sie laut Voraussetzung für Nicht-Paare undefiniert sind. Beides zusammengenommen ist ein Widerspruch zur Annahme ist, dass es zwei unterschiedliche Operatoren gäbe.

Für π_2 zeigt man die Eindeutigkeit analog.

2.3 Anmerkungen

Die zuvor bewiesene Eindeutigkeit beudetet nicht, dass sich zwei Projektionsoperatoren π_1 und π'_1 (bzw. π_2 und π'_2) nicht hinsichtlich anderer Aspekte unterscheiden können. Zum Beispiel können sie mit Hilfe unterschiedlicher Verfahren (Algorithmen) zum selben Ergebnis kommen.

Sehr häufig werden Projektionsoperatoren so definiert, dass sie auch für Nicht-Paare irgendwelche Ergebnisse liefern. Über das Abbildungsverhalten von derartigen Projektionsoperatoren sagt dieser Satz allerdings nichts aus. Dieser Fall wird laut Voraussetzung ausgeschlossen. Das heißt, wenn man beispielsweise einen Projektionsoperator ${\overline \pi}_1$ hat, der auch für Nicht-Paare definiert ist, muss man zunächst einen neuen Operator

$$\pi_1(p) :=\left\{\begin{array}{ll} {\overline \pi}_1(p) & \mbox{falls }\bigvee a,b: p = [a,b]\\ \mbox{undefiniert} & \mbox{sonst} \end{array}\right.$$

defnieren, damit man den Eindeutigkeitssatz auf diesen anwenden kann.

Die Eindeutigkeit gilt daher nur, wenn das „Prinzip von der Identität des Ununterscheidbaren“ zum Einsatz kommt und man die Projektionsoperatoren stets nur auf Paare anwendet.